PART3　3 次関数の最大・最小

3　$a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

Point Pickup

3 次関数の最大，最小は，区間の端点の y 座標と，区間内の極値が候補となる。

定義域を変化させたとき，極値をとる x 座標が区間の端点となるときや，区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標が，場合の分かれ目となる。

第 15 講　PART3　確認問題

1　$a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

最も適切な値を答え，選択肢は最も適切なものを選べ。

$0<a<$ [ア]，[イ] $<a$ のとき　$m(a)=$ [ウ]

[エ] $\leqq a \leqq$ [オ] のとき　$m(a)=$ [カ]

[[ウ]，[カ] の選択肢]

①　0　②　-4　③　-9

④　a^3-6a^2+9a　⑤　$-a^3+6a^2-9a$

⑥　$3a^2-12a+9$　⑦　$-3a^2+12a-9$

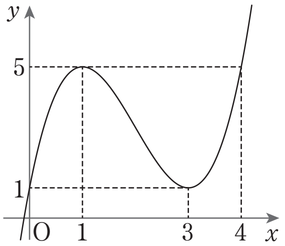
PART3　３次関数の最大・最小

3　$a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下。



x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	極大 5	↘	極小 1	↗

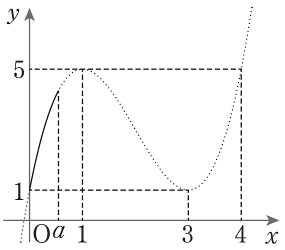
$f(x)=5$ より　$x^3-6x^2+9x+1=5$　　$(x-1)^2(x-4)=0$

よって　$x=1,\ 4$

(i)　$0<a<1$ のとき

右図より $f(x)$ は $x=a$ のとき最大となり

$M(a)=f(a)=a^3-6a^2+9a+1$

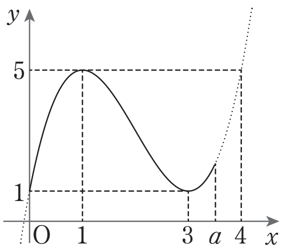


(ii)　$1 \leqq a \leqq 4$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ における $y=f(x)$ のグラフは右図実線部分。

よって，$f(x)$ は $x=1$ のとき最大となり

$M(a)=f(1)=5$

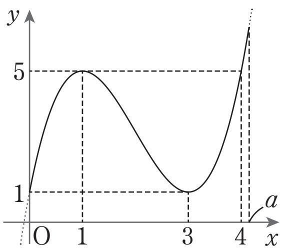


(iii)　$4<a$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ における $y=f(x)$ のグラフは右図実線部分。

よって，$f(x)$ は $x=a$ のとき最大となり

$$M(a)=f(a)=a^3-6a^2+9a+1$$



(i)〜(iii)より

$$M(a)=\begin{cases} a^3-6a^2+9a+1 & (0<a<1,\ 4<a) \\ 5 & (1 \leqq a \leqq 4) \end{cases}$$

第 15 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウ：⑤，エ：1，オ：4，

カ：②

[解説]

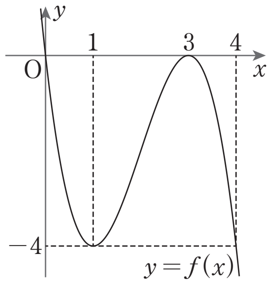
$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次の通り。

x	0	…	1	…	3	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右図。



また，$f(x)=-4$ とすると

$$-x^3+6x^2-9x=-4$$

$$(x-1)^2(x-4)=0$$

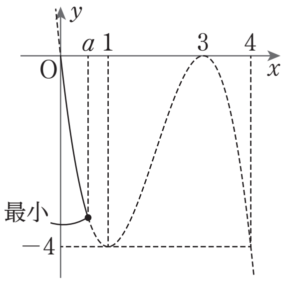
よって，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-4$ の共有点の x 座標は　$x=1,\ 4$ **[A]**

(i)　$0<a<1$ のとき **[B]**

右図より，$f(x)$ は

$x=a$ のとき最小となり

$$m(a)=f(a)=-a^3+6a^2-9a$$

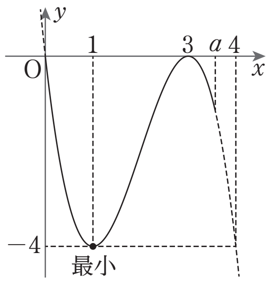


(ii)　$1\leqq a\leqq 4$ のとき

右図より，$f(x)$ は

$x=1$ のとき最小となり

$$m(a)=f(1)=-4$$



[A]　区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標を求めておく。

[B]　定義域を変化させたとき，最大値，最小値が変わるところが場合の分かれ目。「極値をとる x 座標」や，「区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標」が，場合の分かれ目の候補となる。

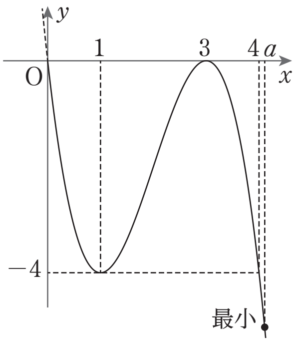
(iii)　$4<a$ のとき

右図より，$f(x)$ は

$x=a$ のとき最小となり

$m(a)=f(a)$

$=-a^3+6a^2-9a$



(i)〜(iii)より

$0<a<1$，$4<a$ のとき　$m(a)=-a^3+6a^2-9a$

$1\leqq a\leqq 4$ のとき　$m(a)=-4$